



La geometria euclidea “a ritroso”

Una proposta
che prende spunto da riflessioni
di esperti ben più titolati di noi ...
Zeuthen, Gallo, ...

La proposta *Cantoni-Sargenti* *tutta da discutere...*

- Partire dal teorema di Pitagora, noto agli studenti fin dalla scuola media, per ricostruire il percorso mentale fatto da Euclide nell'impostazione del suo I Libro, con scopi didattici
- Il percorso potrebbe essere presentato come la soluzione di un giallo
 - in cui il teorema di Pitagora è “il misfatto”
 - e i vari elementi introdotti via via (definizioni, assiomi, teoremi,...) sono gli indizi per trovare il “colpevole” che in questo caso è la sua *dimostrazione*



Presentazione MOLTO sintetica ...

di un percorso che richiede una più ampia articolazione

Disponibilità nostra

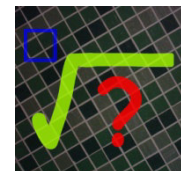
- A discutere il percorso
- A collaborare per la creazione di materiali da utilizzare in classe
- A offrire tutoraggio sulla sperimentazione

Aspetti storici: riflessioni ed approfondimenti lungo il percorso

- Tutto il percorso si presta ad approfondimenti storici:
 - Il teorema di Pitagora prima di Pitagora
 - La duplicazione del quadrato e Socrate
 - Talete
 - ...

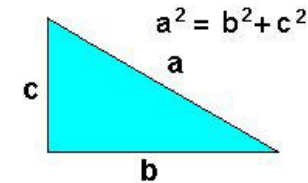
Primo passo: il richiamo a Pitagora

- Indagine su cosa gli studenti sanno e cosa ricordano
- È probabile che il teorema venga visto nella sua formulazione legata alle misure
- È anche probabile che la formulazione sia strettamente legata alla radice quadrata e che per conseguenza ci siano problemi a trovare la misura di un cateto, dati gli altri due lati
- Potrebbe infine darsi che gli studenti associno al teorema due distinte formule, senza interpretarle come una inversa dell'altra.



Smontare preconcetti e misconcetti

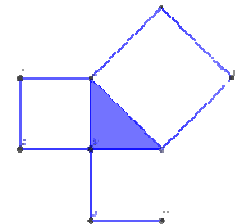
- Intanto è necessario riportare il teorema ad una formula unica, senza radice quadrata, e abituare alla determinazione della formula per il cateto (*non inversa!*)



- Quindi porre il problema:

Se non conosco le misure dei lati, come posso esprimere il teorema di Pitagora?

- Riportare il teorema nella forma euclidea



Il “misfatto”

- Ma se Euclide non ha fatto uso delle misure, come ha fatto a verificare la correttezza del teorema di Pitagora?
- Si passa alla ricerca degli “indizi” per risolvere la questione ...

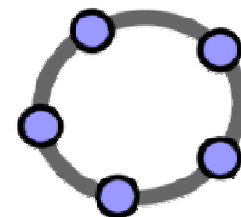


Un celebre problema
risolto da Euclide
come caso particolare
del teorema di Pitagora

La duplicazione del quadrato

Per noi una riflessione con un file

GeoGebra



Il file GeoGebra

- Permette di seguire e comprendere il ragionamento di Euclide
- Consente di iniziare a raccogliere un insieme di “vocaboli” necessari alla costruzione (segmento, quadrato, angolo retto, ...):
 - gli studenti devono raccogliere questi come “indizi” che verranno successivamente studiati in modo approfondito

Da questo problema ...

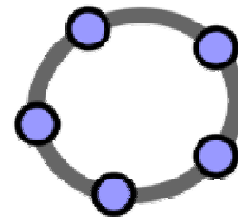
... alla generalizzazione, ovvero il teorema di Pitagora

Ancora un file GeoGebra può rappresentare la situazione,

ma non risolve il giallo:

ci vogliono le prove!

Analizziamo allora gli indizi.



Primo indizio: il segmento

Come costruisco gli «oggetti» che diverranno i nostri strumenti per descrivere la realtà



Vediamone un esempio ...

*Dagli oggetti la percezione coglie qualcosa che è ad essi comune. Prevale in essi la «lunghezza» Rappresentiamo quello che abbiamo percepito in **astratto** richiamandoci ad un oggetto **concreto** che attualizza meglio di altri la situazione: il filo teso*



Il primo oggetto

Abbiamo così costruito un nuovo oggetto, il «segmento»



che la geometria considera una figura geometrica costituita da punti



tra i punti gli estremi sono privilegiati, in essi il segmento inizia e termina.

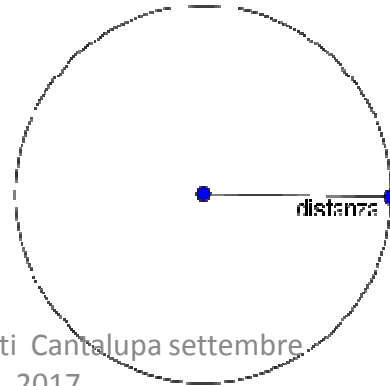


Qualcosa di più rispetto a Euclide

- Per Euclide *due segmenti hanno la stessa lunghezza se si possono sovrapporre con un movimento rigido*
- Per noi
 - La sovrapposizione si ottiene con una **traslazione** quindi con una *trasformazione geometrica*
 - I segmenti con la stessa lunghezza sono *infiniti*, quindi si parla di **classe di equivalenza** che ha come rappresentante la *lunghezza*.

Secondo indizio: il cerchio

- Proposizione: *Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza*
- Gli infiniti cerchi ottenuti con la medesima *distanza* appartengono ad una stessa classe di equivalenza
- La distanza è quello che noi chiamiamo *raggio*



Inserimento di un nuovo
concetto in *modo operativo*

Classe di equivalenza

Classe di equivalenza

- Quando definiamo un oggetto possiamo mettere insieme tutti quelli che hanno una o più caratteristiche comuni.
Ad esempio per il segmento *essere uguali*, per il cerchio *avere la stessa distanza*
- Abbiamo così costruito *classi di equivalenza* in cui possiamo prendere un'unica rappresentazione per gli infiniti oggetti che la compongono: per esempio **lunghezza e raggio**

E ancora: Trasformazioni

sempre come strumenti
concreti operativi

Alcuni movimenti rigidi nel piano

- Traslazione
- Rotazione
- Simmetria

Sono movimenti rigidi in qualche modo nella testa di Euclide ma per noi strumenti effettivi di lavoro

E ora un nodo fondamentale

- Sono stati introdotti due *oggetti*: segmento e cerchio
- Una volta acquisiti come concetti matematici, essi diventano **strumenti**
- Come tali ci consentono di costruire nuove proposizioni. Ad esempio ...

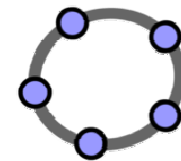
Dice Euclide ...

- Se ho due punti, che ne posso fare?
 - *Posso costruire un segmento*
- I due punti, insieme al segmento, diventano *strumenti* per costruire
 - *due cerchi*
- I cerchi si incontrano
 - anche se Euclide non lo dimostra!



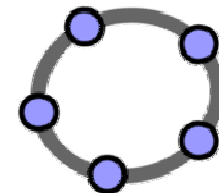
Ecco un nuovo oggetto

- Viene costruito un triangolo
- In questo caso il **triangolo equilatero**.
- A sua volta esso diventa *strumento* che serve a costruire nuove proposizioni



Un altro indizio: l'angolo

- Retta r
- Retta s che la interseca in V
- Parte di piano individuata tra le due rette è **l'angolo**
- La traslazione della retta s genera *angoli uguali*
- Tutte le rette trasformate da s formano una classe di equivalenza il cui rappresentante è la **direzione**



Per restare nel campo del giallo

- Noi individuiamo gli indizi (*oggetti*)
- Capiamo il loro valore e così diventano utili (*strumenti*) per interpretare alcuni aspetti della realtà che vogliamo conoscere (*nuove proposizioni: definizioni, teoremi, ...*)

Ci fermiamo con ...

questo assaggio

Il possibile percorso a partire dagli indizi

- Fondamenti: segmento (distanza, lunghezza), retta, semiretta
- Circonferenza, angoli, rotazione (confronto angoli, segmenti)
- Intersezione di rette
- Intersezione di angoli (il triangolo), congruenza
- Angoli dei triangoli, angoli interni ed esterni
- Parallelismo, somma angoli interni di un triangolo, “strisce” , la “distanza delle strisce”
- Il parallelogrammo
- Quadrilateri e loro proprietà
- Triangolo rettangolo e circonferenza
- Generalizziamo il triangolo. Dall’equilatero ... mediane, altezze, bisettrici
- Area ed equivalenza
- Quadrato area doppia
- Euclide generalizza: il teorema di Pitagora

E adesso ...

A voi la parola!